TEORÍA DE LA MEDIDA

Sesión 17

Integrabilidad uniforme

En esta parte vamos a definir y caracterizar a los conjuntos de funciones que son uniformemente integrables, concepto que resulta de mucha utilidad ya que nos permite resultados más fuertes en relación a la convergencia de sucesiones de funciones integrables.

En esta sección asumiremos que la medida μ es finita.

Proposición 1. *Si f es una función medible no negativa, entonces:*

$$\int_{\mathbb{F}} f d\mu = \int_0^\infty \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : f(y) > x\}\right) dx$$

Demostración

Consideremos primero una función simple no negativa φ con representación canónica $\varphi = \sum_{j=1}^m b_j I_{E_j}$.

En este caso, se tiene:

$\int_0^\infty \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : \varphi(y) > x\}\right) dx = \int_0^\infty \sum_{\{j\in\{1,\ldots,m\}:b_j>x\}} \mu(E_j)\, dx$

$= \int_0^\infty \sum_{j=1}^m I_{[0,b_j)}(x)\mu(E_j)\, dx = \sum_{j=1}^m \int_0^\infty I_{[0,b_j)}(x)\mu(E_j)\, dx$

$= \sum_{j=1}^m b_j\mu(E_j) = \int_{\mathbb{F}} \varphi d\mu.$

Consideremos ahora una sucesión no decreciente $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples no negativas tales que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{F}$ y, para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [0,\infty)$, definamos $g_n(x) = \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : \varphi_n(y) > x\}\right)$.

La sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no decreciente y $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : f(y) > x\}\right)$ para cualquier $x \in [0,\infty)$, así que, por el teorema de la convergencia monótona, se tiene:

$\int_0^\infty \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : f(y) > x\}\right) dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : \varphi_n(y) > x\}\right) dx$

$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : \varphi_n(y) > x\}\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} \varphi_n d\mu = \int_{\mathbb{F}} f d\mu$

∎

Teorema 1. *Si f es una función integrable, entonces la serie:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| \geq k\}\right)$$

converge.

Demostración

$\int_0^{\infty} \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| > x\}\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} I_{[0,n)}(x)\, \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| > x\}\right) dx$

$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{n} I_{[k-1,k)}(x)\, \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| > x\}\right) dx$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\infty} I_{[k-1,k)}(x)\, \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| > x\}\right) dx$

$I_{[k-1,k)}(x)\, \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| \geq k\}\right) \leq I_{[k-1,k)}(x)\, \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| > x\}\right)$

Así que:

$\sum_{k=1}^{n} \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| \geq k\}\right) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\infty} I_{[k-1,k)}(x)\, \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| \geq k\}\right) dx$

$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\infty} I_{[k-1,k)}(x)\, \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| > x\}\right) dx$

Por lo tanto, tomando límites, se obtiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| \geq k\}\right) \leq \int_0^{\infty} \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| > x\}\right) dx = \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu$$

■

Corolario 1. *Si f es una función integrable, entonces*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \mu\left[|f| > \alpha\right] = 0$$

Demostración

$$\lim_{\alpha\to\infty} \mu\left[|f| > \alpha\right] = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f(y)| \geq k\}\right) = 0$$

■

Teorema 2. *Una función medible f es integrable si y sólo si:*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu = 0$$

Demostración

Supongamos primero que f es integrable. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos:

$$f_n = \begin{cases} |f| & \text{si } |f| \leq n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ c.s y $|f_n| \leq |f|$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que, por el teorema de la convergencia dominada, se tiene:

$$\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[|f|\leq n]} |f|\, d\mu$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[|f|>n]} |f|\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu - \int_{[|f|\leq n]} |f|\, d\mu \right) = 0$$

Dada $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{[|f|>n]} |f|\, d\mu < \varepsilon$ para cualquier $n \geq N$, entonces, si $\alpha \geq N$, se tiene:

$$\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu \leq \int_{[|f|>N]} |f|\, d\mu < \varepsilon$$

Así que, $\lim_{\alpha\to\infty} \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu = 0$.

Supongamos ahora que $\lim_{\alpha\to\infty} \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu = 0$. Entonces, tomando $\alpha > 0$ tal que $\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu < 1$, se tiene:

$$\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu = \int_{[|f|\leq\alpha]} |f|\, d\mu + \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu \leq \alpha\mu\left([|f| \leq \alpha]\right) + 1 < \infty$$

■

Teorema 3. *Una función medible f es integrable si y sólo si dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$ para cualquier conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) < \delta$.*

Demostración

Dada $\varepsilon > 0$, tomemos $\alpha > 0$ tal que $\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{2\alpha}$. Entonces, para cualquier conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) < \delta$, se tiene:

$\int_A |f|\, d\mu = \int_{\{|f|\leq\alpha\}} I_A |f|\, d\mu + \int_{\{|f|>\alpha\}} I_A |f|\, d\mu$

$\leq \alpha \int_{\{|f|\leq\alpha\}} I_A d\mu + \int_{\{|f|>\alpha\}} |f|\, d\mu$

$\leq \alpha \int_{\mathbb{F}} I_A d\mu + \int_{\{|f|>\alpha\}} |f|\, d\mu$

$= \alpha\mu(A) + \int_{\{|f|>\alpha\}} |f|\, d\mu < \varepsilon$

■

Definición 1 (Integrabilidad uniforme). *Se dice que una familia $\mathcal{H}$ de funciones medibles es uniformemente integrable si:*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup\left\{ \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H} \right\} = 0$$

Teorema 4. *Una familia $\mathcal{H}$ de funciones medibles es uniformemente integrable si y sólo si el conjunto $\left\{\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H}\right\}$ está acotado y, dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$ para cualesquiera $f \in \mathcal{H}$ y $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) \leq \delta$.*

Demostración

Supongamos primero que la familia $\mathcal{H}$ es uniformemente integrable.

Sea $\alpha > 0$ tal que $\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu < 1$ para cualquier $f \in \mathcal{H}$, se tiene entonces:

$$\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu = \int_{[|f|\leq\alpha]} |f|\, d\mu + \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu \leq \alpha\mu(\mathbb{F}) + 1$$

Así que el conjunto $\left\{\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H}\right\}$ está acotado.

Dada $\varepsilon > 0$, sea $\alpha > 0$ tal que $\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ para cualquier $f \in \mathcal{H}$, definamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ y consideremos un conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) \leq \delta$. Se tiene entonces:

$$\int_A |f|\, d\mu \leq \int_{[|f|\leq\alpha]} I_A |f|\, d\mu + \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu \leq \alpha\mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Inversamente, supongamos que el conjunto $\left\{\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H}\right\}$ está acotado y, dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$ para cualesquiera $f \in \mathcal{H}$ y $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) \leq \delta$.

Dada $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $\int_A |f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ para cualesquiera $f \in \mathcal{H}$ y $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) \leq \delta$. Definamos $\alpha_0 = \frac{1}{\delta} \sup\left\{\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H}\right\}$ y tomemos $f \in \mathcal{H}$ y $\alpha \geq \alpha_0$. Se tiene entonces:

$$\mu([|f| > \alpha]) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu \leq \delta$$

Por lo tanto:

$$\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

Así que:

$$\sup\left\{\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H}\right\} < \varepsilon$$

Es decir:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup\left\{\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H}\right\} = 0 \qquad \blacksquare$$

Proposición 2. *Sea f una función medible e integrable, Γ un conjunto cualquiera y $\{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ una familia de funciones medibles tales que $|f_\gamma| \leq f$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, entonces la familia $\{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es uniformemente integrable.*

Demostración

Para cualquier $\gamma \in \Gamma$, se tiene:

$$\int_{[|f_\gamma|>\alpha]} |f_\gamma| \, d\mu \leq \int_{[|f_\gamma|>\alpha]} |f| \, d\mu \leq \int_{[|f|>\alpha]} |f| \, d\mu$$

Así que:

$$\text{lím}_{\alpha\to\infty} \sup \left\{ \int_{[|f_\gamma|>\alpha]} |f_\gamma| \, d\mu : \gamma \in \Gamma \right\} \leq \text{lím}_{\alpha\to\infty} \int_{[|f|>\alpha]} |f| \, d\mu = 0$$

■

Ahora viene el tercer teorema de convergencia de la integral. Es una generalización del teorema de la convergencia dominada ya que, de acuerdo con la proposición anterior, éste es un caso particular del siguiente resultado.

Teorema 5. *Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una familia uniformemente integrable de funciones medibles tal que $f = \text{lím}_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces f es integrable y:*

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f| \, d\mu = 0$$

Demostración

Sea $\alpha > 0$ tal que $\int_{[|f_n|>\alpha]} |f_n| \, d\mu < 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\int_{\mathbb{F}} |f_n| \, d\mu = \int_{[|f|\leq\alpha]} |f_n| \, d\mu + \int_{[|f|>\alpha]} |f_n| \, d\mu \leq \alpha\mu\left([|f_n| \leq \alpha]\right) + 1 \leq \alpha\mu\left(\mathbb{F}\right) + 1$$

Por lo tanto, por el lema de Fatou, se tiene:

$$\int_{\mathbb{F}} |f| \, d\mu = \int_{\mathbb{F}} \text{lím} \, |f_n| \, d\mu \leq \text{lím inf}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n| \, d\mu \leq \alpha\mu\left(\mathbb{F}\right) + 1 < \infty$$

Así que f es integrable.

Para cada $\alpha > 0$, definamos:

$$f_n^{(\alpha)} = \begin{cases} f_n & \text{si } |f_n| \leq \alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f^{(\alpha)} = \begin{cases} f & \text{si } |f| \leq \alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $C = \{x \in \mathbb{F} : \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}$.

Si $x \in C$ es tal que $|f(x)| < \alpha$, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n^{(\alpha)}(x) = f^{(\alpha)}(x)$. Así que, si $\mu\left([|f| = \alpha]\right) = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}$ c.s y, como $\left|f_n^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}\right| \leq 2\alpha$, se tiene, por el teorema de la convergencia dominada:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} \left|f_n^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}\right| d\mu = 0$$

Por otra parte:

$$\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|\leq\alpha]} |f_n - f|\, d\mu + \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|>\alpha]} |f_n|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha,|f|\leq\alpha]} |f|\, d\mu$$

$$\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|\leq\alpha]} |f_n - f|\, d\mu + \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|>\alpha]} |f_n - f|\, d\mu$$

$$+ \int_{[|f_n|>\alpha,|f|\leq\alpha]} |f_n - f|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha,|f|>\alpha]} |f_n - f|\, d\mu$$

$$\leq \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|\leq\alpha]} |f_n - f|\, d\mu + \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|>\alpha]} |f_n|\, d\mu + \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|>\alpha]} |f|\, d\mu$$

$$+ \int_{[|f_n|>\alpha,|f|\leq\alpha]} |f_n|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha,|f|\leq\alpha]} |f|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha,|f|>\alpha]} |f_n|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha,|f|>\alpha]} |f|\, d\mu$$

$$= \int_{\mathbb{F}} \left|f_n^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}\right| d\mu + \int_{[|f_n|\leq\alpha,|f|>\alpha]} |f|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha,|f|>\alpha]} |f|\, d\mu$$

$$+ \int_{[|f_n|>\alpha,|f|\leq\alpha]} |f_n|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha,|f|>\alpha]} |f_n|\, d\mu$$

$$= \int_{\mathbb{F}} \left|f_n^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}\right| d\mu + \int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu + \int_{[|f_n|>\alpha]} |f_n|\, d\mu$$

Dada $\varepsilon > 0$, sea α_0 tal que $\int_{[|f|>\alpha]} |f|\, d\mu < \varepsilon$ y $\int_{[|f_n|>\alpha]} |f_n|\, d\mu < \varepsilon$, para cualquier $\alpha \geq \alpha_0$, entonces:

$$\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu \leq \int_{\mathbb{F}} \left|f_n^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}\right| d\mu + 2\varepsilon$$

para cualquier $\alpha \geq \alpha_0$.

Sea $\alpha \geq \alpha_0$ tal que $\mu\left([|f| = \alpha]\right) = 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu \leq 2\varepsilon$$

Así que, como $\varepsilon > 0$ es arbitraria, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$$

■

Corolario 2 (**Teorema de la convergencia uniformemente integrable**). *Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una familia uniformemente integrable de funciones medibles tales que $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ es integrable y:*

$$\int_{\mathbb{F}} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} f_n d\mu$$

Tenemos un inverso del teorema 5:

Teorema 6. *Sean $(f_n)_{n\in N}$ una sucesión de funciones integrables y f una función medible tales que $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$. Entonces la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable.*

Demostración

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{\mathbb{F}} |f_N - f|\, d\mu < 1$, entonces:

$$\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu \leq \int_{\mathbb{F}} |f_N - f|\, d\mu + \int_{\mathbb{F}} |f_N|\, d\mu < \infty$$

Así que f es integrable.

Dada $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ para cualquier $n > N$, se tiene entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{F}} |f_n|\, d\mu \leq \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu + \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu < \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu + \max\left\{\int_{\mathbb{F}} |f_1 - f|\, d\mu, \ldots, \int_{\mathbb{F}} |f_N - f|\, d\mu, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

Así que el conjunto $\left\{\int_{\mathbb{F}} |f_n|\, d\mu : n \in \mathbb{N}\right\}$ está acotado.

Tomemos ahora $\delta > 0$ tal que $\max\left\{\int_A |f|\, d\mu, \int_A |f_1|\, d\mu, \ldots, \int_A |f_N|\, d\mu\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$ para cualquier conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) < \delta$. Entonces, si $\mu(A) < \delta$ y $n > N$, se tiene:

$$\int_A |f_n|\, d\mu \leq \int_A |f|\, d\mu + \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu < \varepsilon$$

$\blacksquare$

Teorema 7. *Sea $(f_n)_{n\in N}$ una sucesión de funciones integrables no negativas tal que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero y $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{F}} f d\mu < \infty$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$.*

Demostración

La sucesión $\{\min(f_n, f)\}_{n\in N}$ está acotada por f y converge puntualmente a f excepto a lo más en un conjunto de medida cero, así que, por el teorema de la convergencia dominada, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} \min(f_n, f)\, d\mu = \int_{\mathbb{F}} f d\mu$. Por lo tanto:

$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} \max(f_n, f)\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} [f_n + f - \min(f_n, f)]\, d\mu$

$= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} f_n d\mu + \int_{\mathbb{F}} f d\mu - \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} \min(f_n, f)\, d\mu = \int_{\mathbb{F}} f d\mu.$

Así que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} [\max(f_n, f) - \min(f_n, f)]\, d\mu = 0$$

■

Corolario 3. *Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión de funciones integrables no negativas tal que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero y $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{F}} f d\mu < \infty$. Entonces la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable.*

Combinando los teoremas 5, 6, y 7 y el corolario 2, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 8. *Sea $(f_n)_{n\in N}$ una sucesión de funciones integrables tales que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

1. *La familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable.*
2. $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$
3. $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n|\, d\mu = \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu < \infty$

Demostración

Si la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable, entonces, por el teorema 5, se tiene $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$. Así que la primera condición implica la segunda.

Si $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$, entonces, por el teorema 6, la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable. Así que la segunda condición implica la primera.

Si $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n|\, d\mu = \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu < \infty$, entonces, por el teorema 7, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$$

Así que la tercera condición implica la segunda.

Si la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente integrable, entonces la familia $\{|f_n| : n \in \mathbb{N}\}$ también es uniformemente integrable, así que, por el corolario 2, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{F}} |f_n|\, d\mu = \int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu < \infty$$

Por lo tanto, la primera condición implica la tercera. ■

Corolario 4. *Sea* $\{f_n\}_{n\in N}$ *una sucesión de funciones integrables no negativas tales que* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ *existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

1. La familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es uniformemente integrable.*

2. $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$

3. $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{F}} f d\mu < \infty$

Teorema 9. *Sea* $\mathcal{H}$ *una familia de funciones medibles uniformemente integrable. Entonces la familia:*

$\mathcal{G} = \Big\{ f : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}^+$: *Existe una sucesión* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de funciones en* $\mathcal{H}$ *tales que*

$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *excepto a lo más en un conjunto de medida cero*$\}$

es uniformemente integrable.

Demostración

Primero observemos que si $A \in \mathcal{F}$, entonces la familia de funciones $\mathcal{H}' = \{fI_A : f \in \mathcal{H}\}$ es uniformemente integrable.

Sea M una cota del conjunto $\left\{\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{H}\right\}$.

Sea $f \in \mathcal{G}$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{H}$ tales que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces, por la proposición 5, f es integrable y:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n - f|\, d\mu = 0$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{\mathbb{F}} |f_N - f|\, d\mu < 1$. Entonces:

$$\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu \leq \int_{\mathbb{F}} |f_N - f|\, d\mu + \int_{\mathbb{F}} |f_N|\, d\mu < 1 + M$$

Así que la familia $\left\{\int_{\mathbb{F}} |f|\, d\mu : f \in \mathcal{G}\right\}$ está acotada.

Ahora, dada cualquier $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $\int_A |f|\, d\mu < \frac{1}{2}\varepsilon$ para cualesquiera $f \in \mathcal{H}$ y $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) \leq \delta$.

Si $f \in \mathcal{G}$, sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) \leq \delta$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{H}$ tales que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n I_A = f I_A$ excepto a lo más en un conjunto de medida cero, así que, por la proposición 5:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{A}} |f_n - f|\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} |f_n I_A - f I_A|\, d\mu = 0$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{\mathbb{A}} |f_N - f| \, d\mu < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Entonces:

$$\int_{\mathbb{A}} |f| \, d\mu \leq \int_{\mathbb{A}} |f_N - f| \, d\mu + \int_{\mathbb{A}} |f_N| \, d\mu < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Así que, por la proposición 4, $\mathcal{G}$ es uniformemente integrable.

■

Consideremos ahora un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$**.**

Proposición 3. *Si* Y *una variable aleatoria integrable, la familia:*

$$\mathcal{H} = \{E[Y \mid \mathcal{G}] : \mathcal{G} \text{ es sub } \sigma\text{-álgebra de } \Im\}$$

es uniformemente integrable.

Demostración

Si $\mathcal{G}$ es una subσ-álgebra de $\Im$, definamos $Y_{\mathcal{G}} = E[Y \mid \mathcal{G}]$.

Se tiene $|Y_{\mathcal{G}}| = |E[Y \mid \mathcal{G}]| \leq E[|Y| \mid \mathcal{G}]$. Así que, para $\alpha > 0$, se tiene:

$$\int_{[|Y_{\mathcal{G}}| > \alpha]} |Y_{\mathcal{G}}| \, dP \leq \int_{[|Y_{\mathcal{G}}| > \alpha]} E[|Y| \mid \mathcal{G}] \, dP = \int_{[|Y_{\mathcal{G}}| > \alpha]} |Y| \, dP$$

$$P[|Y_{\mathcal{G}}| > \alpha] \leq \frac{1}{\alpha} E[|Y_{\mathcal{G}}|] \leq \frac{1}{\alpha} E[E[|Y| \mid \mathcal{G}]] = \frac{1}{\alpha} E|Y|$$

Dada $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $\int_A |Y| \, dP < \varepsilon$ para cualquier conjunto $A \in \Im$ tal que $\mu(A) < \delta$. Tomando $\alpha > \frac{1}{\delta} E|Y|$, se tiene $P[|Y_{\mathcal{G}}| > \alpha] < \delta$, así que:

$$\int_{[|Y_{\mathcal{G}}| > \alpha]} |Y_{\mathcal{G}}| \, dP \leq \int_{[|Y_{\mathcal{G}}| > \alpha]} |Y| \, dP < \varepsilon$$

Por lo tanto:

$$\text{lím}_{\alpha \to \infty} \sup \left\{ \int_{[|Y_{\mathcal{G}}| > \alpha]} |Y_{\mathcal{G}}| \, dP : \mathcal{G} \text{ es sub}\sigma\text{-álgebra de } \Im \right\} = 0$$

■